Semaine du 25 novembre : Arithmétique, Nombres réels

Partie I - Arithmétique

- Tout le début du chapitre à revoir.
- Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, congruence modulo n. C'est une relation d'équivalence. Compatibilité avec les lois de $\mathbb{Z}$.
- Petit théorème de Fermat.

La suite a été exposée à titre culturel en classe ; elle est donc non exigible de la part des colleurs. *A contrario*, on ne pourra pas interdire à un élève de l'utiliser dans un exercice, mais dans tous les cas, cet exercice devra aussi pouvoir se résoudre de manière "élementaire".

- Ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. C'est un anneau commutatif. CNS d'inversibilité. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier.
- Idéal d'un anneau commutatif, définition d'un anneau principal. La somme de deux idéaux est un idéal. Conséquence : théorème de Bézout dans un anneau principal, avec ses corollaires habituels.

Partie II - Nombre réels

- On admet la construction de $\mathbb{R}$.
- Résolution d'inégalités dans $\mathbb{R}$.
- Borne supérieure, borne inférieure. Tout max est un sup. Tout min est un inf.
- Théorème admis : dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.
- Corollaire : dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.
- Passage au sup (resp. à l'inf) dans une inégalité large.
- Valeur absolue. Propriétés élémentaires. Révision de l'inégalité triangulaire.
- Tout réel admet une unique partie entière.
- Propriétés élémentaires de la partie entière. Partie fractionnaire.
- Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Prolongement de $\leq$, de $+$, de $\times$.
- Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée.
  - On rappelle que sa borne supérieure existe, et que c'est le minimum de l'ensemble
  $$\mathrm{Maj}_{\mathbb{R}}(A) := \{M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ x \leq M\}.$$
  - On peut démontrer que c'est aussi le minimum de l'ensemble
  $$\mathrm{Maj}_{\overline{\mathbb{R}}}(A) := \{M \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall x \in A,\ x \leq M\}.$$
  On vérifie que cela permet d'étendre la définition de $\sup(A)$ au cas où A n'est pas majorée (dans ce cas, $\sup(A) = +\infty$).
  - On retiendra que, pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide, on peut considérer $\sup(A) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et que $\sup(A) \in \mathbb{R}$ ssi A est majorée (dans $\mathbb{R}$).
  - Remarque symétrique avec la borne inférieure.

- Par définition, un intervalle est un convexe de $\mathbb{R}$. Les intervalles non vides de $\mathbb{R}$ sont exactement :
  - les $[a, b]$, avec $-\infty < a \leq b < +\infty$
  - les $[a, b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$
  - les $]a, b]$, avec $-\infty \leq a < b < +\infty$
  - les $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

  et ces 4 cas sont 2 à 2 exclusifs.

- Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite **dense dans** $\mathbb{R}$ lorsque l'une de ces deux propriétés équivalentes est vérifiée :
  i) A rencontre tout intervalle $]a, b[$ tel que $-\infty < a < b < +\infty$.
  ii) A rencontre tout intervalle $[a, b]$ tel que $-\infty < a < b < +\infty$.

  La caractérisation séquentielle de la densité n'est pas au programme de cette semaine.

- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

- Nombres décimaux. Approximation décimale. La densité de $\mathbb{D}$ sera vue au moment de la caractérisation séquentielle.

- Exercice vu en classe : les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$, soit denses dans $\mathbb{R}$. Son énoncé comme sa démonstration sont hors programme, et si un élève souhaite l'invoquer, il devra en demander la permission au colleur. Inversement, le colleur ne posera pas d'exercice nécessitant impérativement ce résultat (à moins de le faire admettre).

Partie III - Shortlist (questions de cours)

i) Petit théorème de Fermat, y compris le lemme préparatoire qui stipule que, pour tout nombre premier p,
$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], \quad \binom{p}{k} \equiv 0\,[p].$$

ii) En admettant que, dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure, montrer que toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

iii) Redémontrer l'inégalité triangulaire (dans $\mathbb{R}$).

iv) Tout réel admet une unique partie entière.

v) Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que I est de l'une des 4 formes $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ (avec les inégalités qui vont bien sur a et b). Il n'est pas demandé de redémontrer que ces 4 formes sont 2 à 2 exclusives.

vi) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Morceau de la semaine

`https://www.youtube.com/watch?v=_Wc2XznyF9w`