Semaine du 2 décembre : Réels et Suites

Partie I - Nombres réels

Revoir le programme de la semaine dernière.

Partie II - Suites réelles

- Relation $\leq$ sur les suites réelles.
- Définitions habituelles : monotonie, croissance, décroissance, suite bornée, majorée, minorée, stationnaire, etc.
- Définition d'une limite (finie dans un premier temps). Exemple d'une suite constante, d'une suite stationnaire. Si elle existe, une limite est unique.
- Toute suite convergente est bornée.
- Limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Elle continue à être unique.
- Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration.
- Passage à la limite dans une inégalité large.
- Réciproque partielle : soit a un réel, et supposons que $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$.
  - Si $\ell > a$, alors $u_n > a$ à partir d'un certain rang.
  - Si $\ell < a$, alors $u_n < a$ à partir d'un certain rang.
- Combinaison linéaire de 2 limites finies.
- Opérations algébriques en toute généralité (pourvu qu'on évite les formes indéterminées).
- Discussion du comportement de la suite $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\alpha \in]-1,+\infty[$.
- Suite extraite. Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite tend vers ℓ. Utilisation de la contraposée pour montrer qu'une suite ne tend pas vers une limite donnée, voire pour montrer qu'elle n'admet aucune limite.
- Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.
- Caractérisation séquentielle de la densité. Application : $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide, et $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un majorant de X (au sens de $\overline{\mathbb{R}}$). Alors $M = \sup(X)$ ssi M est limite de points de X. Résultat symétrique avec la borne inférieure.
- Théorème de la limite monotone.
- Suites adjacentes.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass. Notion de valeur d'adhérence.
- Brève extension aux suites complexes.
  - Définition à l'aide de modules d'une suite bornée, d'une suite convergente.
  - Pour les résultats suivants, les preuves vues dans le cas réel restent valables :
    - unicité de la limite (nécessairement finie !) ;
    - toute suite convergente est bornée ;

        * opérations algébriques sur les limites (combinaison linéaire, produit, quotient, module).
    - Caractérisation de la convergence à l'aide de la partie réelle et de la partie imaginaire.
    - Théorème de Bolzano-Weierstrass version complexe.

- La convergence en moyenne de Cesaro a été vue à titre d'exercice.
- Suites arithmético-géométriques.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (cas complexe, cas réel). Pour cette semaine, la démonstration sera admise.
- Suites récurrentes en toute généralité (suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, plan d'étude général) : elles ne sont pas au programme de cette semaine.

Partie III - Shortlist (questions de cours)

i) Unicité de la limite (cas fini uniquement).

ii) Caractérisation séquentielle de la densité.

iii) Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.

iv) Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide, et $M \in \mathbb{R}$ un majorant de A (pour cette question de cours, on traitera donc uniquement le cas où $M < +\infty$). On suppose que M est limite de points de A. Montrer que $M = \sup(A)$.

v) Montrer que toute suite croissante et majorée converge.

vi) En admettant le théorème de Bolzano-Weierstrass (cas réel), démontrer le cas complexe.

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=5NUBenx_eis&feature=emb_logo`