

Semaine du 9 décembre : Suites numériques, Espaces vectoriels

Partie I - Suites numériques

- Début du chapitre à revoir (exercices uniquement).
- Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$: plan d'étude général.

Partie II - Espaces vectoriels (début)

Note : dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque, mais en pratique on se restreindra à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire $\mathbb{Q}$).

- Définition d'un $\mathbb{K}$ -ev. Tout $\mathbb{C}$ -ev peut être muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -ev.
- Pseudo-absorbance, pseudo-intégrité. Pseudo-règle des signes.
- Colinéarité de deux vecteurs (plusieurs définitions équivalentes!).
- Produit cartésien de deux $\mathbb{K}$ -ev. Généralisation.
- Exemples classiques de $\mathbb{K}$ -ev : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, E^X (où X est un ensemble quelconque).
- Dans le cours, un sev de E a été défini comme un sous-groupe stable par la loi externe. Condition suffisante pour qu'une partie soit un sev.
- Intersection d'un ensemble de sev, sev engendré par une partie.
- Si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\text{Vect}(A)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des x_i .
- Définition d'une droite vectorielle, d'un plan vectoriel.
- Définition d'une application linéaire. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Image et noyau.
- La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
- Structure de $\mathbb{K}$ -ev de $\mathcal{L}(E, F)$. Bilinéarité de la composition.
- La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
- Structure de $\mathbb{K}$ -algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$.
- Familles finies de vecteurs (début)
 - Famille libre, liée, génératrice.
 - Caractérisation de la liberté. Relation de liaison. Une famille est liée ssi l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres (mais on ne sait pas lequel!).
 - Nombreux exemples de calcul dans $\mathbb{R}^2$ à l'aide de systèmes linéaires (pivot de Gauss).
 - Nous n'avons pas encore parlé de bases, et encore moins de familles presque nulles.

Partie III - Shortlist (questions de cours)

- i) Pseudo-absorbance, pseudo-intégrité, pseudo-règle des signes.
ii) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Montrer que

$$\text{Vect}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

- iii) Montrer que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire. Montrer que la bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
iv) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$\begin{cases} \text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v) \\ \text{Ker}(v \circ u) \supset \text{Ker}(u) \\ v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v) \end{cases}$$

- v) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ (v, u) &\mapsto v \circ u \end{aligned}$$

est bilinéaire (inutile de redémontrer qu'elle est bien définie).

- vi) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$. Montrer que $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée ssi

$$\exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists (\mu_i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq i_0}} \in \mathbb{K}^{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}}, e_{i_0} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq i_0}} \mu_i e_i.$$

Morceau de la semaine (à avoir écouté une fois dans sa vie!)

<https://www.youtube.com/watch?v=31CtNc0Zp2c>

