Semaine du 6 janvier : Révisions d'analyse

Partie I - Suites réelles

On pourra poser des exercices sur ce chapitre.

Partie II - Fonctions : limite et continuité

- Notion de voisinage. On n'interrogera pas spécifiquement sur cette notion, elle est là uniquement en vue d'unifier la suite du chapitre.
  - Si $a \in \mathbb{R}$, un "voisinage fondamental" de a a été défini comme un intervalle $[a-\delta, a+\delta]$ avec $\delta > 0$. Si $a = +\infty$, il a été défini comme un intervalle $[A, +\infty]$ avec $A \in \mathbb{R}$, et symétriquement en $-\infty$.
  - Définition d'un point adhérent, de l'adhérence d'une partie. Caractérisation séquentielle.
  - Si $f : X \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{X}$, notion de propriété vérifiée par f (ou $f(x)$ selon les cas) au voisinage de a.
- Définitions de base : relation d'ordre (partielle) sur $\mathbb{R}^X$, inf et sup d'une fonction, monotonie, parité, périodicité, ...
- Fonction lipschitzienne.
- Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{X}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Définition de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ en termes de voisinages. Phrases quantifiées au cas par cas (neuf sous-cas en tout !).
- Unicité de la limite.
- Limite d'une restriction. Limite induite (à gauche, à droite, épointée).
- Caractère local de la limite : si f et g coïncident au voisinage de a, alors elles ont le même comportement en a.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Opérations algébriques sur les limites (combinaison linéaire, produit, quotient, composée).
- Théorème d'encadrement, principes de majoration et de minoration, passage à la limite dans une inégalité large.
- Si f admet une limite $b \in \mathbb{R}$ en a, alors f est bornée au voisinage de a. Si de plus $b > \alpha$, alors $f(x) > \alpha$ au voisinage de a. Résultat symétrique si $b < \beta$.
- Théorème de la limite monotone. Corollaire : en tout point $a \in]u, v[$, f admet une limite à gauche et une limite à droite (finies) qui encadrent $f(a)$.
- Continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle, opérations algébriques. Prolongement par continuité.

Partie III - Shortlist (questions de cours)

i) Montrer que

$$\begin{array}{rccc} f\ : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

n'est pas lipschitzienne.

ii) Soit $f\ : X \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{X}$ et $b, b' \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b' \end{cases}$$

Montrer que $b = b'$.

iii) Caractérisation séquentielle de la limite.

iv) Soit $(u, v) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $u < v$, et $f\ :]u, v[\to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que

- si f est majorée, alors elle admet une limite finie en v ;
- si f n'est pas majorée, alors $f(x) \xrightarrow[x \to v]{} +\infty$.

v) Soit $(u, v) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $u < v$, et $f\ :]u, v[\to \mathbb{R}$ croissante. Soit $a \in]u, v[$. Montrer que les limites $f(a^-)$ et $f(a^+)$ existent, sont finies, et que

$$f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+).$$

vi) Prolongement par continuité : existence et unicité.

Morceaux de bonne année :

https://www.youtube.com/watch?v=qABAh-b8ZgQ
https://www.youtube.com/watch?v=M-b3iU-INDo