Semaine du 20 janvier : Dimension finie, Matrices

Note : *le corps de base considéré est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire $\mathbb{Q}$).*

Partie I - Dimension finie

- Revoir le début du chapitre (cf. programme de la semaine dernière).
- Définition d'une application linéaire de rang fini. Rang d'une telle application. Théorème du rang.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$. Alors u est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.
- Soit E et F de même dimension (finie), $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$. Si $u \circ v = \mathrm{id}_E$, alors $v \circ u = \mathrm{id}_F$.
- Invariance du rang par composition à gauche ou à droite par un isomorphisme.
- Base duale (la notion de base antéduale étant hors programme, elle n'a pas été vue). Si $(e_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de E, on a
$$\begin{cases} \forall x \in E,\ x = \sum e_i^\star(x) e_i \\ \\ \forall \varphi \in E^\star,\ \varphi = \sum \varphi(e_i) e_i^\star \end{cases}$$
- Les hyperplans sont exactement les sev de dimension $n - 1$.
- Soit $p \in [\![1, n]\!]$. L'intersection de p hyperplans est de dimension $\geq n - p$. Réciproquement, tout sev de dimension $n - p$ peut s'écrire comme intersection de p hyperplans.
- On fixe une base $(e_i)_{1 \le i \le n}$, et on note (x_i) les coordonnées de $x \in E$. Les hyperplans sont exactement les ensembles d'équation $\sum a_i x_i = 0$, avec les a_i non tous nuls. Pour un hyperplan donné, deux équations sont toujours proportionnelles.

Partie II - Matrices (début)

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension np. Base canonique constituée par les matrices élémentaires (notées $E_{i,j}$ si le contexte est clair, et $E_{i,j}^{(n,p)}$ sinon).
- Produit matriciel. Exemple des matrices élémentaires. Associativité, bilinéarité. Produit par blocs.
- Matrices carrées.
  - $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non commutative dès que $n \geq 2$.
  - Matrice identité, matrices inversibles.
  - Trace d'une matrice carrée. Principales propriétés.
  - Matrices diagonales, matrices triangulaires. Principales propriétés (structure de $\mathbb{K}$-algèbre, dimension).
  - Si A est triangulaire inversible, A^{-1} est triangulaire du même type.
- Transposition (principales propriétés). Matrices symétriques, antisymétriques. Caractère supplémentaire de ces deux sev.

Attention, les points suivants ne sont pas au programme de cette semaine ; merci aux colleurs de les lire bien attentivement.

- Quelque algorithme que ce soit pour inverser une matrice.
- Implication $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$
- CNS d'inversibilité d'une matrice diagonale ou triangulaire.
- Le fait que toute matrice triangulaire stricte soit nilpotente, ainsi qu'une majoration de son indice de nilpotence.
- Toute la suite du chapitre.

Partie III - Shortlist (questions de cours)

i) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$. Alors u est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.

ii) Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'intersection de p hyperplans est de dimension $\geq n - p$.

iii) Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Tout sev de dimension $n - p$ peut s'écrire comme intersection de p hyperplans.

iv) Associativité et bilinéarité du produit matriciel.

v) Produit de deux matrices élémentaires.

vi) Si A est triangulaire inversible, A^{-1} est triangulaire du même type.

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=VixJQx8emTo`

Note : dans le morceau de la semaine dernière, vous vous êtes peut-être demandé ce qu'est cet instrument curieux...C'est un ***cymbalum****. Roby Lakatos est sans conteste le plus grand violoniste tzigane des 50 dernières années.*