Semaine du 27 janvier : Matrices

<u>Note :</u> *toutes les matrices considérées sont à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire $\mathbb{Q}$).*

Partie I - Matrices (suite et fin)

- Début du chapitre sur les matrices à revoir (cf. programme de colle de la semaine dernière).
- Matrices et applications linéaires.
  - Matrice d'un vecteur dans une base. L'application $x \mapsto \mathrm{mat}_{(e_i)}(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.
  - Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
  - Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. L'application $u \mapsto \mathrm{mat}_{(e_j),(f_i)}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.
  - L'égalité $y = u(x)$ se retraduit matriciellement par $Y = AX$ (pourvu que les bases soient compatibles).
  - Application linéaire canoniquement associée à A. Il s'agit de l'unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice vaut A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. C'est aussi l'application $X \mapsto AX$.
  - $\mathrm{Im}(A)$ est engendré par les colonnes de A. Les lignes de A fournissent un système d'équations de $\mathrm{Ker}(A)$. À cette occasion, on rappelle que les élèves doivent savoir décrire un sev de $\mathbb{K}^n$ comme un Vect <u>et aussi</u> sous forme d'un système d'équations.
  - Lien entre la composition des applications linéaires et la multiplication des matrices.
  - Matrice d'un endomorphisme dans une base. L'application $u \mapsto \mathrm{mat}_{(e_i)}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.
  - Interprétation géométrique d'une matrice par blocs, en termes de blocs nuls et de stabilité de sev.
- Soit $(x_j)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n vecteurs dans E de dimension n, et A la matrice de (x_j) dans une base donnée. Alors (x_j) est une base ssi A est inversible.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de même dimension, et soit A la matrice de u dans un couple de bases données. Alors u est un isomorphisme ssi A est inversible.
- À titre d'exercice, nous avons vu un algorithme autour de l'inversibilité de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - Si le but est simplement de savoir si A est inversible, on résout le système $AX = 0$. Dès qu'on aboutit à un système triangulaire dont la diagonale ne s'annule pas, inutile d'aller plus loin, on sait que A est inversible.
  - Si de plus on cherche à exprimer A^{-1}, on résout plutôt le système $AX = Y$. Puis, en remplaçant successivement Y par les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on obtient les colonnes de A^{-1}.
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $AB = I_n$ alors $BA = I_n$.
- Une matrice triangulaire T est inversible ssi sa diagonale ne s'annule pas, et dans ce cas, les $(T^{-1})_{i,i}$ sont égaux aux $1/t_{i,i}$.
- Toute matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire stricte vérifie $T^n = 0$.
- Matrice de passage. Formules "$X = PX'$", "$A' = Q^{-1}AP$", voire "$A' = P^{-1}AP$".
- Équivalence matricielle, similitude matricielle. Ce sont des relations d'équivalence (sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement).
- Trace d'un endomorphisme. La trace d'un projecteur est égale à son rang.

- Rang d'une matrice. C'est le rang de u canoniquement associée, ainsi que le rang des colonnes de A vues comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$). Invariance par multiplication par une matrice inversible.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n,p)$.
- Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelle base. Le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice dans n'importe quel couple de base.
- Une matrice carrée est inversible ssi elle est de rang plein.
- Si on se donne $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r, alors sa matrice est égale à J_r dans un couple de bases bien choisi.
- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r ssi elle est équivalente à $J_r^{(n,p)}$. Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.
- Invariance du rang par transposition. Le rang de A est égal au rang de ses lignes (vues comme des vecteurs de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$).
- Nous n'avons pas eu le temps de voir les résultats suivants :
  - A est de rang $\geq r$ ssi elle contient une sous-matrice (r,r) inversible.
  - Si B est une sous-matrice de A, on a $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$.
  - L'algorithme de calcul du rang par le pivot de Gauss.

Partie II - Shortlist (questions de cours)

i) Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie (non nulle). Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u).$$

ii) Soit $(x_j)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n vecteurs dans E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$, et A la matrice de (x_j) dans une base donnée. Alors (x_j) est une base de E ssi A est inversible.

iii) Une matrice triangulaire est inversible ssi sa diagonale ne s'annule pas.

iv) La trace d'un projecteur est égale à son rang.

v) Si on se donne $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r, alors sa matrice est égale à J_r dans un couple de bases bien choisi.

vi) Le rang de A est égal au rang de ses lignes (vues comme des vecteurs de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$).

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=Fg2i2NB-i3o`