Semaine du 10 février : Dérivation, Polynômes

Partie I - Dérivation

- Tout le début du chapitre à revoir.
- Opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composée, bijection réciproque.
- Attention, le "théorème de classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement" a disparu des programmes.
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.
  - Définitions de base. Passage par les parties réelle et imaginaire.
  - Opérations algébriques.
  - Dérivée de $\exp \circ f$ lorsque f est à valeurs complexes. Dérivée de f^α ($\alpha \in \mathbb{N}$, resp. $\mathbb{Z}$ resp. $\mathbb{C}$) lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}^\star$ resp. $\mathbb{R}_+^\star$).
  - L'inégalité des accroissements finis reste vraie, mais pas l'égalité.

Partie II - Polynômes

Note : *tous les polynômes considérés sont sont à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire $\mathbb{Q}$, voire exceptionnellement $\mathbb{Z}$).*

- Définition formelle de $\mathbb{K}[X]$. C'est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative. Base canonique.
- Degré d'un polynôme. Degré d'une somme, d'un produit, d'une combinaison linéaire. $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre. Les polynômes inversibles sont les constantes non nulles.
- Espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$. Base canonique.
- Divisibilité, relation d'association. Chaque classe d'association admet un unique représentant unitaire ou nul.
- Division euclidienne (existence, unicité).
- Tout idéal s'écrit d'une unique manière $P\mathbb{K}[X]$, avec P unitaire ou nul.
- Ppcm, pgcd.
  - Si $A, B \neq 0$, un pgcd de A et B est défini au choix :
    i) par la définition "naïve" : c'est-à-dire comme un diviseur commun $P \neq 0$ de degré maximal ;
    ii) ou alors, par la caractérisation
    $$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X].$$
    On vérifie que ces deux définitions sont équivalentes. La deuxième s'étend naturellement au cas $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On montre alors que les pgcd forment une classe d'association. L'unique représentant unitaire ou nul est appelé le pgcd, on le note $A \wedge B$.
  - Si $A, B \neq 0$, un ppcm de A et B est défini au choix :
    i) par la définition "naïve" : c'est-à-dire comme un multiple commun $Q \neq 0$ de degré minimal ;
    ii) ou alors, par la caractérisation
    $$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = Q\mathbb{K}[X].$$

On vérifie que ces deux définitions sont équivalentes. La deuxième s'étend naturellement au cas $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On montre alors que les ppcm forment une classe d'association. L'unique représentant unitaire ou nul est appelé le ppcm, on le note $A \vee B$.

  - Les diviseurs communs de A et B sont exactement les diviseurs de $A \wedge B$, et les multiples communs de A et B sont exactement les multiples de $A \vee B$.

- Théorèmes habituels d'arithmétique.

- Évaluation d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ en $x \in \mathbb{K}$. Combinaison linéaire, produit, composée. Plus généralement, évaluation de P en un élément d'une $\mathbb{K}$-algèbre.

- Racine d'un polynôme. x est une racine ssi $X - x | P$. Généralisation à un nombre fini de scalaires deux à deux distincts.

- Attention, la suite du chapitre n'est pas au programme de cette semaine, elle sera au programme de la rentrée : ordre de multiplicité d'une racine, fonction polynomiale (et identification dans le cas où $\mathbb{K}$ est infini), dérivation formelle, bases de $\mathbb{K}_n[X]$, polynômes irréductibles, etc.

Partie III - Shortlist (questions de cours)

i) Formule de Leibniz (cas $\mathcal{C}^n$).

ii) Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$. Montrer que $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$, et que le coefficient dominant de $P \times Q$ est égal au produit des coefficients dominants de P et Q.

iii) Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ (existence, unicité).

iv) Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire ou nul P tel que $\mathcal{I} = P\mathbb{K}[X]$.

v) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in \mathbb{K}$. Montrer que $P(x) = 0$ ssi $X - x \mid P$.

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=b43q9gv-Iyo`