Semaine du 3 mars : Polynômes

<u>Note :</u> *tous les polynômes considérés sont sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire $\mathbb{Z}$ exceptionnellement, mais aucun résultat théorique n'est exigible sur ce dernier point).*

Partie I - Polynômes (suite et fin)

- Tout le début du chapitre à revoir.
- Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $n+1$ racines distinctes, alors $P = 0$. Si deux polynômes coïncident en une infinité de points, alors ils sont égaux.
- Dans le cadre du programme, on identifiera P et la fonction polynomiale associée $\widetilde{P}$.
- Ordre de multiplicité d'une racine pour un polynôme non nul.
- Un polynôme de degré n admet au plus n racines comptées avec leur multiplicité.
- Dérivation formelle des polynômes. Combinaison linéaire, produit, composée.
- Dérivée n-ème : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz).
- Caractérisation de l'ordre d'une racine à l'aide des dérivées successives de P.
- Formule de Taylor.
- Base des polynômes de Lagrange. Application à l'interpolation.
- Polynôme irréductible. Existence d'une décomposition en facteurs irréductibles unitaires.
- Si P est irréductible unitaire, valuation P-adique d'un polynôme non nul. On en déduit l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles.
- Relations coefficients-racines (démonstration formelle **non exigible**).
- Théorème de d'Alembert-Gauss (**admis**).
- Si un polynôme est à coefficients réels, ses racines complexes non réelles sont deux à deux conjuguées, et elles ont même ordre de multiplicité.
- Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Si A divise B dans $\mathbb{C}[X]$, alors A divise B dans $\mathbb{R}[X]$.
- Facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$.

Partie II - Shortlist (questions de cours)

i) Formule $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

ii) Caractérisation de l'ordre d'une racine à l'aide des dérivées successives de P.

iii) Formule de Taylor.

iv) Soit $P \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ à coefficients <u>réels</u>, et $z \in \mathbb{C}$. Alors $m_P(z) = m_P(\bar{z})$ (la notation $m_P(\cdot)$ désigne l'ordre de multiplicité).

v) Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Si B divise A dans $\mathbb{C}[X]$, alors B divise A dans $\mathbb{R}[X]$.

vi) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ irréductible. Alors $\deg(P) \leq 2$.

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=IbX6NFTyjZw`