Semaine du 10 mars : Polynômes, Intégration

Partie I - Polynômes

On rappelle que le corps de base vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, voire $\mathbb{Q}$.

- Tout le chapitre à revoir.
- Si on le souhaite, il sera également possible de poser quelques exercices d'arithmétique dans $\mathbb{Z}[X]$.

Partie II - Intégration

$[a, b]$ est un segment non réduit à un point.

- Subdivision de $[a, b]$. Pas d'une subdivision, subdivision plus fine.
- Algèbre des fonctions en escaliers sur $[a, b]$, algèbre des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.
- Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée.
- Convergence uniforme.
- Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier.
- Intégrale d'une fonction en escalier (justification non exigible, notamment concernant l'indépendance par rapport au choix de la subdivision adaptée). Propriétés usuelles.
- Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux : quelle que soit la suite (φ_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, la suite numérique $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ admet une limite (finie), et cette limite est indépendante du choix de (φ_n) (justification non exigible). On la note $\int_{[a,b]} f$.
- Propriétés usuelles de $\int_{[a,b]} f$, avec f continue par morceaux : linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance, inégalité triangulaire.
- "Stricte positivité" et "stricte croissance" de l'intégrale pour des fonctions continues.
  - Pour être exact, la notation $f > 0$ signifie $f \geq 0$ et $f \neq 0$. Cela se réécrit

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b],\ f(x) \geq 0 \\ \exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

    soit encore, de manière équivalente :

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b],\ f(x) \geq 0 \\ \exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) > 0 \end{cases}$$

  - De même, la notation $f < g$ signifie

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b],\ f(x) \leq g(x) \\ \exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) < g(x_0) \end{cases}$$

- Si $f > 0$ et f est continue, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
- Si $f < g$ et si f et g sont continues, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$.

- "Théorème en 4 points" : supposons que

  i) (pour rappel, $a < b$)

  ii) f est continue

  iii) $f \geq 0$

  iv) $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$

  Alors $f = 0$.

- Sommes de Riemann : concernant l'énoncé, l'hypothèse au programme est la continuité par morceaux. Mais concernant la démonstration, seul le cas lipschitzien a été vu en classe.

Note : si un exercice nécessite le calcul explicite d'une intégrale, les élèves connaissent les techniques vues au lycée, mais cela n'appelle aucun développement théorique (ce sera au programme de la semaine suivante). Il s'agit essentiellement du calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive, et de la technique d'intégration par parties. De même, la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *(intégrale dite "orientée") a été vue au lycée, mais nous ne l'avons pas encore définie en cours.*

Partie III - Shortlist (questions de cours)

i) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que f est bornée.

ii) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier telle que

$$\forall x \in [a,b],\ |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

iii) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues par morceaux. Montrer que

$$\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g.$$

iv) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Justifier sommairement que $|f|$ est continue par morceaux, et montrer que

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

v) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ lipschitzienne. Montrer que

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} f.$$

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=U5ZR7hOtdFY`