Semaine du 17 mars : Intégration, Matrices

Attention, ce programme tient sur 2 pages.

Partie I - Intégration

- Valeur moyenne de f sur $[a, b]$.
- Fonction continue par morceaux sur un intervalle non trivial.
- Écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, avec a et b dans un ordre quelconque (on dit aussi "intégrale orientée"). Linéarité, relation de Chasles, sommes de Riemann.
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes (pas de technicité attendue).
- Lien entre intégration et dérivation : théorème fondamental de l'analyse.
- Techniques usuelles de calcul d'intégrale : utilisation d'une primitive, intégration par parties, changement de variable. Tout changement de variable un peu technique doit être rapidement suggéré par l'examinateur.
- Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.

Partie II - Autour du pivot de Gauss

- Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang.
- Soit $n, p \geq 2$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ et $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = 1 + \mathrm{rg}(\tilde{A})$.

- Application au calcul du rang par la méthode du pivot de Gauss.
- Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Par opérations élémentaires sur les lignes, on peut toujours se ramener à une matrice triangulaire supérieure.
- Méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice carrée.
  - Méthode par résolution formelle d'un système $AX = Y$ paramétré par Y (voir un ancien programme de colle).
  - Algorithme de Gauss-Jordan, dit aussi "algorithme de la matrice augmentée" (c'est essentiellement la même méthode qu'au point précédent).
  - Corollaire : les matrices d'opérations élémentaires sur les lignes engendrent $GL_n(\mathbb{K})$.
- Généralités sur les systèmes linéaires
  - Généralités : système homogène associé, rang, différentes interprétations de l'ensemble des solutions, système de Cramer.
  - Résolution par pivot de Gauss. Notion de variables principales et de variables auxiliaires. Le nombre de variables principales est toujours égal au rang.

- À propos des algorithmes "autour du pivot de Gauss", voici ce qui a été vu :
  - établir une relation de liaison entre des vecteurs de $\mathbb{K}^n$;
  - déterminer le noyau d'une matrice ;
  - Si $(C_1, \dots, C_p)$ est une famille de $\mathbb{K}^n$, extraction d'une base de $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

    En pratique, on résout $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j C_j = 0$, puis on repère les indices des variables principales (mais il faut savoir le justifier à chaque fois) ;
  - passer d'un sev de $\mathbb{K}^n$ exprimé comme un Vect à un système d'équations, et vice-versa ;
  - inverser une matrice carrée.

Partie III - Shortlist (questions de cours)

i) Soit I un intervalle non trivial, $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} F : I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

est une primitive de f.

ii) Théorème de changement de variable (en intégration).

iii) Inégalité de Taylor-Lagrange.

iv) Soit $n, p \geq 2$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}^\star \text{ et } \tilde{A} \in \mathcal{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K}). \text{ Alors } \mathrm{rg}(A) = 1 + \mathrm{rg}(\tilde{A}).$$

v) Un calcul explicite utilisant le pivot de Gauss.

Un peu d'introspection pour le morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=Od5cGDOKXFk`