

## Semaine du 24 mars : Analyse asymptotique

### Note à l'attention des colleurs

Cette colle est clairement placée sous le signe du calcul (sans mauvais jeu de mot). On n'hésitera pas à interroger les élèves sur le sujet de façon intensive. En particulier, il est demandé de ne pas poser de question de cours cette semaine. On passera directement à des exercices d'application pratique.

Attention, ce n'est pas pour autant que les calculs posés doivent être pénibles, voire infaisables, bien au contraire! En classe, l'accent a été mis sur la recherche de méthodes les plus élégantes possibles, permettant d'arriver au résultat à peu de frais.

Enfin, merci de prendre en compte le fait que ce chapitre est nouveau pour les élèves. Ils n'ont que peu de pratique, et devront probablement être guidés.

Attention, ce programme tient sur 2 pages.

### Partie I - Symboles de comparaison

- Relations de comparaison sur les suites réelles ou complexes. Caractérisation par le quotient, exemples élémentaires.
- On a  $u_n \sim v_n$  ssi  $u_n = v_n + o(v_n)$ .  $\sim$  est une relation d'équivalence.
- Composition des symboles, opérations sur les équivalents.
- Conservation des propriétés par équivalence. Formule de Stirling (démonstration admise).
- Croissances comparées de  $\ln^\alpha(n)$ ,  $n^\beta$ ,  $e^{\gamma n}$ ,  $n!$ ,  $n^n$ .
- Brève extension aux suites à valeurs complexes.
- Extension aux fonctions.

### Partie II - Développements limités

- Développement limité. Notation  $DL_n(a)$ .
- Existence d'un  $DL_0(a)$  et continuité en  $a$ . Existence d'un  $DL_1(a)$  et dérivabilité en  $a$ . Attention, le résultat devient faux en général pour  $n \geq 2$ .
- Troncature d'un DL. Unicité de la partie régulière.
- $DL(0)$  d'une fonction paire, d'une fonction impaire.
- Opérations algébriques : combinaison linéaire, produit.
- DL et composition : aucun résultat général n'est exigible, mais les étudiants doivent savoir traiter chaque exemple au cas par cas (technique de substitution).
- Le quotient a été vu comme application du principe de substitution.
- Forme normalisée d'un DL. Utilisation pour prévoir l'ordre d'un produit ou d'un quotient, voire d'une composée.

- DL d'une primitive.
- Formule de Taylor-Young (sous l'hypothèse de classe  $\mathcal{C}^n$ ).
- Lorsque la fonction est de classe  $\mathcal{C}^n$ , la formule de Taylor-Young justifie qu'on puisse "dériver" son  $DL_n$ , mais ce fait doit être redémontré si l'examineur le demande.
- DL des fonctions usuelles. Pour le DL de  $\tan$ , seul l'ordre 3 est exigible.
- Développements asymptotiques : aucun résultat général n'est exigible. Quelques exemples ont été vus en cours.
- Application aux études de courbes : positions relatives entre la courbe et une tangente, entre la courbe et une asymptote, CN d'extremum, CS d'extremum, point d'inflexion, etc.
- Suites implicites (aucune théorie générale ; quelques exemples ont été vus en TD).

### Partie III - Intégration

S'il reste du temps et si le colleur le souhaite, il pourra poser une exercice sur l'intégration.

Morceau de la semaine : <https://www.youtube.com/watch?v=zyodILZEQFg>

