Semaine du 31 mars : Fractions rationnelles, EDL

Note à l'attention des colleurs

Comme la semaine précédente, cette colle est clairement placée sous le signe du calcul (sans mauvais jeu de mot). On n'hésitera pas à interroger les élèves sur le sujet de façon intensive. En particulier, il est demandé de ne pas poser de question de cours cette semaine. On passera directement à des exercices d'application pratique.
Attention, ce n'est pas pour autant que les calculs posés doivent être pénibles, voire infaisables, bien au contraire ! En classe, l'accent a été mis sur la recherche de méthodes les plus élégantes possibles, permettant d'arriver au résultat à peu de frais.
On commencera la colle par un calcul rapide (décomposition en éléments simples, résolution d'une équation différentielle concrète, etc.), puis on pourra passer à des exercices plus théoriques si on le souhaite.

Attention, ce programme tient sur 2 pages.

Partie I - Fractions rationnelles

Le corps de base est exclusivement égal à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Définitions
  - Corps $\mathbb{K}(X)$ (la construction formelle n'est pas exigible). Structure de $\mathbb{K}$-ev.
  - Degré d'une fraction rationnelle. Indépendance du choix du représentant, coïncidence sur $\mathbb{K}[X]$. Degré d'une combinaison linéaire, d'un produit.
  - Existence et unicité de l'écriture irréductible (avec un dénominateur unitaire). Racines et pôles (ils sont définis à partir de l'écriture irréductible).
  - Fonction rationnelle. il a été démontré en cours que l'évaluation passait aux opérations algébriques, "pourvu qu'on évite de diviser par 0". Plus précisément :
    * si $F = \dfrac{P}{Q}$, où l'écriture n'est pas nécessairement irréductible, l'évaluation est autorisée pourvu qu'on ait $Q(x) \neq 0$;
    * si $F = \lambda G_1 + \mu G_2$ ou si $F = G_1 G_2$, l'évaluation est autorisée pourvu que x ne soit pôle ni de G_1 ni de G_2.

    Si F et G coïncident en une infinité de points, alors $F = G$.
  - Fraction paire, impaire.
- Décomposition en éléments simples
  - Partie entière d'une fraction rationnelle (existence, unicité).
  - Théorème fondamental (admis) : toute fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ (resp. de $\mathbb{R}(X)$) admet une unique décomposition en éléments simples. Forme générale de cette décomposition.
  - Lorsque P est scindé, décomposition de $\dfrac{P'}{P}$.
  - Diverses techniques de décomposition.
    * Par identification.
    * Si λ est un pôle simple, détermination du coefficient a dans le terme $\dfrac{a}{X-\lambda}$.

        - ∗ Généralisation : si λ est un pôle d'ordre p, détermination du coefficient a dans le terme $\dfrac{a}{(X-\lambda)^p}$.
        - ∗ Exploitation de la parité.
        - ∗ Si $F \in \mathbb{C}(X)$ admet une écriture à coefficients réels, diverses relations sur les coefficients.
        - ∗ Évaluation en un point.
        - ∗ Multiplication par un monôme puis passage à la limite.

    Note : la division selon les puissances croissantes est hors programme.

- Primitivation de fonctions rationnelles.

Partie II - Équations différentielles linéaires

- Généralités sur les équations différentielles linéaires : équation homogène associée, structure de l'ensemble des solutions. Principe de superposition.
- Équations linéaires du premier ordre.
    - Mise sous forme résolue.
    - Résolution de l'équation homogène associée.
    - Méthode dite de "variation de la constante".
    - Problème de Cauchy : existence et unicité d'une solution.
    - Les recollements ne sont pas spécifiquement au programme, ils ont été vus à titre d'exercice uniquement.
- Équations linéaires du second ordre à coefficients constants.
    - Équation homogène associée.
        - ∗ Résolution par le polynôme caractéristique (cas complexe, cas réel).
        - ∗ Les solutions forment un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2.
    - Solution particulière de l'équation générale
        - ∗ Seuls 2 cas sont au programme :
            - · lorsque le second membre est polynomial ;
            - · lorsqu'on a une équation du type $y'' + ay' + by = \mathrm{e}^{rt}$, et ses avatars par combinaison linéaire.
        - ∗ Utilisation du principe de superposition.
        - ∗ Utilisation d'une partie réelle ou imaginaire.
    - Problème de Cauchy : existence et unicité d'une solution (résultat admis).

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=iTJBUy3eE1A`