Semaine du 28 avril : Déterminants, convexité

Partie I - Groupe symétrique

Si on le souhaite ardemment, on pourra poser un exercice sur le groupe symétrique, mais ce n'est clairement pas le cœur du programme. Compte tenu de sa difficulté, cette partie sera réservée aux candidats qui se révèlent les plus à l'aise au cours de l'heure de colle.

En particulier, il est bien évident qu'on ne saurait commencer la colle par cette partie.

Partie II - Déterminants

E désigne un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$, et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ désigne une base de E.

- Forme p-linéaire. Les formes p-linéaires forment un $\mathbb{K}$-ev. Effet d'une dilatation.
- Lorsque f est p-linéaire, développement de $f\left(\sum_i \lambda_{i,1} e_i, \ldots, \sum_i \lambda_{i,p} e_i\right)$.
- Forme n-linéaire alternée. Effet d'une transvection, d'une transposition.
- Une forme n-linéaire alternée vérifie

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n).$$

  Développement de $f\left(\sum_i \lambda_{i,1} e_i, \ldots, \sum_i \lambda_{i,n} e_i\right)$.
- Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E. Il existe une unique forme n-linéaire alternée f telle que $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$, on l'appelle déterminant dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.
- Relation de Chasles.
- Lien entre base et non-nullité du déterminant.
- Déterminant de $u \in \mathcal{L}(E)$: c'est le scalaire $\det_{(e_i)}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$, il est indépendant du choix de la base. De plus il vérifie

$$\det{}_{(e_i)}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) \times \det{}_{(e_i)}(x_1, \ldots, x_n).$$

- Déterminant de id_E, de λu, de $u \circ v$, de u^{-1} lorsque $u \in GL(E)$.
- Déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Trois définitions équivalentes :
  - i) c'est le déterminant des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$;
  - ii) c'est aussi le déterminant de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée ;
  - iii) formule explicite ("formule des signatures").
- Déterminant de I_n, de λA, de AB, de A^{-1} lorsque $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Le déterminant est un invariant de similitude.
- Calculs pratiques à l'ordre 2, à l'ordre 3. Les formules de Cramer ont été vues à titre d'exercice uniquement. Elles sont hors programme.

- Le déterminant est invariant par transposition. Caractère n-linéaire et alterné par rapport aux lignes.
- Effet des opérations élémentaires sur le déterminant.
- Déterminant d'une matrice triangulaire, d'une matrice diagonale.
- Mineur, cofacteur. Développement par rapport à une ligne, à une colonne.
- Application : déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice diagonale par blocs.
- Comatrice. Formule de la comatrice. Expression de A^{-1} lorsque $A \in GL_n(\mathbb{K})$.
- Déterminant de Vandermonde.

Partie III - Convexité

$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non trivial, et on considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

- Définition de la convexité.
- Inégalité de Jensen.
- f est convexe ssi pour tout $a \in I$, $\tau_a f$ est une fonction croissante. Dans ce cas, position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à une corde.
- Si f est convexe, alors elle est dérivable à gauche et à droite en tout point $a \in \mathring{I}$ (et donc, elle est continue en un tel point).
- Supposons f dérivable. Alors f est convexe ssi f' est croissante. Dans ce cas, position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à une tangente.
- Supposons f deux fois dérivable. Alors f est convexe ssi $f'' \geq 0$.

Partie IV - Shortlist (questions de cours)

i) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Montrer que la famille $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de E ssi son déterminant dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est non nul.

ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(A^\top) = \det(A)$.

iii) Déterminant triangulaire par blocs.

iv) Formule de la comatrice.

v) Inégalité de Jensen.

vi) f est convexe ssi pour tout $a \in I$, $\tau_a f$ est une fonction croissante.

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=PAcOS2H8WiQ`