

Semaine du 5 mai : Espaces euclidiens

Partie I - Espaces euclidiens

- Produit scalaire, espace préhilbertien, espace euclidien.
- Nombreux exemples de produit scalaire :
 - produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ (notation matricielle $X^\top Y$) ;
 - produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$;
 - produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}[X]$;
 - produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
- Norme euclidienne associée à un produit scalaire. Identités remarquables, identité du parallélogramme. Identité de polarisation.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.
- Définition d'une norme en toute généralité. Certaines normes ne sont pas euclidiennes (aucun contre-exemple explicite n'est exigible).
- Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales. Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$. Relation $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.
- Famille orthogonale, orthonormale. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. C'est en particulier le cas si elle est orthonormale.
- Tout espace euclidien admet une BON.
- Théorème de Pythagore et sa réciproque. Généralisation à plus de deux vecteurs (la réciproque devient fausse).
- Expression d'un vecteur dans une BON. Expression du produit scalaire de deux vecteurs, du carré de la norme d'un vecteur.
- Soit E préhilbertien, et F un sev de E . S'il existe, le supplémentaire orthogonal de F est unique, il vaut nécessairement $F^\perp$. Dans ce cas :
 - on a $(F^\perp)^\perp = F$;
 - définition du projecteur orthogonal sur F , de la symétrie orthogonale d'axe F ;
 - le projeté orthogonal $p(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise la distance $d(x, F)$.
- Réciproquement, si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$. Expression du projeté orthogonal dans une BON de F .
- Théorème de la BON incomplète.
- Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (seule l'existence est au programme, pas l'unicité).

Partie II - Déterminants

S'il reste du temps et si on le souhaite, on pourra poser un exercice sur les déterminants.

Partie III - Shortlist (questions de cours)

- i) Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- ii) Inégalité triangulaire.
- iii) Tout espace euclidien admet une BON.
- iv) Le projeté orthogonal $p(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise la distance $d(x, F)$.
- v) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E . Alors il existe une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k).$$

Morceau de la semaine : <https://www.youtube.com/watch?v=a0E510fBvqE>

