Semaine du 12 mai : Séries

Partie I - Séries numériques

Ce chapitre sera l'occasion de réviser l'analyse asymptotique, notamment à travers des exercices d'application directe visant à déterminer la nature d'une série numérique explicite.

- Généralités : somme partielle S_n, série convergente, divergente. Invariance de la nature de la série par troncature, par décalage d'indice.
- Somme S d'une série convergente. Reste d'ordre n pour une série convergente : par convention, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Relation $S = S_n + R_n$.
- Divergence grossière. La réciproque est fausse (contre-exemple de la série harmonique).
- Séries géométriques.
- La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ssi la suite (u_n) converge.
- Linéarité de la somme. Lien entre la série complexe $\sum u_n$ et les séries réelles $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$.
- Séries à termes dans $\mathbb{R}_+$.
  - Principe de comparaison : si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ avec $\sum v_n$ convergente, alors $\sum u_n$ converge, et de plus,
  $$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$
  - Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature. La sommation des relations de comparaison n'est pas au programme.
  - Critère spécial des séries alternées : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive qui décroît vers 0. Alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge. Contrôle de la somme et des restes.
- Comparaison série / intégrale (aucun théorème général n'a été vu, mais il est demandé aux élèves de bien maîtriser la méthode). Application aux séries de Riemann.
- Convergence absolue.
- Soit $\sum u_n$ une série complexe, et $\sum v_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$ convergente, avec $u_n = O(v_n)$. Alors la série $\sum u_n$ converge (absolument).
- Développement décimal d'un réel positif : existence et unicité d'un développement propre (démonstration non exigible). Illustration : $\mathbb{R}$ est indénombrable (démonstration non exigible).

Partie II - Espaces euclidiens

Si on le souhaite et s'il reste du temps, on pourra poser un exercice sur les espaces euclidiens (cf. programme de la semaine dernière).

Partie III - Questions de cours (shortlist)

i) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la série $\sum z^n$ converge ssi $|z| < 1$, et calculer sa somme dans le cas convergent.

ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive qui décroît vers 0. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

iii) Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.

iv) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge.

v) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que la série $\sum |u_n|$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

vi) Soit $\sum u_n$ à termes dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\sum v_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$ convergente. On suppose que $u_n = O(v_n)$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=21dsRBeIy8A`