Semaine du 19 mai : Dénombrements, Probabilités

Partie I - Dénombrements

- Principe des tiroirs. Définition d'un ensemble fini, de son cardinal.
- Si E est fini et si E et F sont équipotents, alors F est fini de même cardinal que E. Réciproquement, deux ensembles finis de même cardinal sont équipotents.
- Lemme des bergers.
- Partie d'un ensemble fini. Union finie. Produit cartésien. Ensembles F^E, $\mathcal{P}(E)$.
- Application entre deux ensembles de même cardinal : f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective.
- Choisir p objets parmi n : avec ordre et avec répétition, avec ordre et sans répétition, sans ordre et sans répétition. Le cas sans ordre avec répétition est hors-programme, mais il a été vu à titre culturel. On ne peut pas l'exiger d'un élève.
- Nombre d'injections de E dans F. Nombre de permutations de E.

Note : *souvent, le dénombrement d'un ensemble fini fait largement appel à l'intuition. Aussi existe-t-il deux manières de rédiger une preuve. La première, assez ardue mais parfaitement rigoureuse, s'applique à revenir systématiquement à la définition d'un ensemble fini, via une bijection vers un ensemble de la forme $[\![1,n]\!]$ (ou un ensemble fini de référence).*

La deuxième, beaucoup plus intuitive et rapide, consiste à prouver le résultat "avec les mains". Cela demande de l'assurance, mais sur une copie de concours et a fortiori à l'oral, c'est plutôt cette manière qui est attendue. En matière de dénombrements, l'examinateur veut davantage juger de l'expérience et du sens pratique du candidat que de sa capacité à formaliser des preuves qui peuvent rapidement se révéler illisibles. Bien sûr, on ne saurait reprocher à un excellent candidat une formalisation impeccable. Mais il s'agit d'un exercice de haute virtuosité.

Partie II - Probabilités

L'univers Ω est supposé fini (et non vide).

- Définitions de base en probabilités : univers, issue, événement, événement élémentaire.
- Intersection, réunion d'événements. Événement contraire. Événement impossible, événements incompatibles. Système complet d'événements.
- Probabilité. Caractérisation par les probabilités élémentaires. Probabilité uniforme.
- Propriétés de base : croissance, probabilité de $\overline{A}$, de $A \cup B$ (la formule du crible est hors programme). Événement presque sûr.
- Probabilité conditionnelle. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors l'application $\mathbb{P}_B(\cdot)$ est une probabilité sur Ω.
- Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales. Formule de Bayes.
- Événements indépendants. Généralisation à plus de deux événements. En général, l'indépendance (mutuelle) est plus forte que l'indépendance deux à deux.
- Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements indépendants et si $B_1, \dots, B_n$ vérifient $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$, alors $B_1, \dots, B_n$ sont indépendants.

Partie III - Questions de cours (shortlist)

i) Soit E un ensemble fini, et $A \subset E$. Alors

- A est finie ;
- $|A| \leq |E|$;
- $|A| = |E|$ ssi $A = E$.

ii) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal 2^n.

iii) Soit E et F des ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini de cardinal $|E| \times |F|$.

iv) Soit E et F des ensembles finis. Alors F^E est fini de cardinal $|F|^{|E|}$.

v) Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors l'application $\mathbb{P}_B(\cdot)$ est une probabilité sur Ω.

vi) Soit A et B deux évènements indépendants. Alors

- A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
- $\overline{A}$ et B sont indépendants ;
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=unTgYCzTD84`