Semaine du 25 mai : Probabilités, Variables aléatoires

Partie I - Probabilités

- Tout le début du chapitre à revoir (cf. programme de la semaine précédente).
- Évènements indépendants. Généralisation à plus de deux évènements. En général, l'indépendance (mutuelle) est plus forte que l'indépendance deux à deux.
- Si $A_1, \dots, A_n$ sont des évènements indépendants et si $B_1, \dots, B_n$ vérifient $\forall i \in [\![1, n]\!],\ B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$, alors $B_1, \dots, B_n$ sont indépendants.

Partie II - Variables aléatoires

- Loi d'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$. C'est l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$
Elle induit une loi de probabilité sur l'univers $X(\Omega)$. Elle est caractérisée par les probabilités élémentaires $\mathbb{P}(X = x)$ lorsque x parcourt $X(\Omega)$ au sens suivant :
$$\forall A \subset X(\Omega),\ \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$
Grâce au formalisme des sommes presque nulles, la formule reste vraie pour $A \subset E$. En conséquence, si
$$\forall x \in E,\ \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$$
alors X et Y ont même loi (*ie* $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$).
- Image $f(X)$ lorsque $f : E \to F$.
- Couple de variables aléatoires. Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$.
  - La loi conjointe détermine les lois marginales, mais la réciproque est fausse (contre-exemple non exigible).
  - X et Y sont dites indépendantes lorsque
  $$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$
  Dans ce cas, la formule reste évidemment vraie pour $(x, y) \in E \times F$.
  - Supposons que X et Y soient indépendantes. Alors pour tout $A \subset E$ et pour tout $B \subset F$, les évènements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants.
  - Loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ (lorsque $\mathbb{P}(X = x) > 0$).
  - "Transfert d'indépendance" : si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Généralisation à n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$. Lemme des coalitions.
- Variable aléatoire qui suit une loi donnée.
  - Soit $(E, \mathbb{Q})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to E$. On dit que X suit la loi $\mathbb{Q}$ lorsque $\mathbb{P}_X = \mathbb{Q}$. Caractérisation par les probabilités élémentaires : il suffit de vérifier que
  $$\forall x \in E,\ \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{Q}(\{x\}).$$
  - Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
  - Somme de Bernoulli i.i.d.

- Utile pour formaliser les exercices : simulation de variables aléatoires (les résultats de ce paragraphe sont admis).
  - Quelle que soit la loi $\mathbb{Q}$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X définie sur Ω telle que X suive $\mathbb{Q}$.
  - Plus généralement, quels que soient les espaces probabilisés $(E_1, \mathbb{Q}_1), \ldots, (E_n, \mathbb{Q}_n)$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur Ω, indépendantes, telles que chaque X_i suive $\mathbb{Q}_i$.
  - En pratique, les élèves auront le droit de formaliser un exercice en introduisant "une variable uniforme", ou "n variables de Bernoulli indépendantes", etc. Ils n'auront pas à justifier l'existence de telles variables aléatoires, ni de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel elles sont définies.

- Espérance
  - L'espérance de X est définie par $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \times x$.

    Elle vérifie également $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{x \in B} \mathbb{P}(X = x) \times x$ pour tout ensemble B tel que $X(\Omega) \subset B \subset \mathbb{R}$.
  - Elle vérifie également $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \times X(\omega)$.
  - Formule de transfert.
  - Linéarité, positivité, croissance.
  - Inégalité de Cauchy-Schwarz.
  - Espérance d'une constante, d'une Bernoulli, d'une binomiale.
  - Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, mais la réciproque est fausse (contre-exemple non exigible).
  - Inégalité de Markov.

- Variance
  - La variance de X est définie par $\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big]$.

    Elle vérifie également $\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
  - Développement de $\mathrm{V}(aX + b)$.
  - Écart-type. Variable centrée réduite.
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  - Attention, les deux points suivants n'ont pas encore été vus :
    * Covariance. Développement de $\mathrm{V}(X_1 + \ldots + X_n)$. Cas où les X_i sont deux à deux indépendantes.
    * Variance d'une Bernoulli, d'une binomiale.

Partie III - Questions de cours (shortlist)

i) Soit A et B deux évènements indépendants. Alors
   - A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
   - $\overline{A}$ et B sont indépendants ;
   - $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

ii) Lemme des coalitions.

iii) Formule de transfert.

iv) Espérance d'une binomiale.

v) Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

vi) Inégalité de Markov.

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=unTgYCzTD84`