Semaine du 2 juin : Variables aléatoires, Sommabilité

Il s'agit de la dernière colle de l'année ; un grand merci aux colleurs et à notre CDT, et bravo à vous tous !

Partie I - Variables aléatoires

- Loi d'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$. C'est l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

  Elle induit une loi de probabilité sur l'univers $X(\Omega)$. Elle est caractérisée par les probabilités élémentaires $\mathbb{P}(X = x)$ lorsque x parcourt $X(\Omega)$ au sens suivant :

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

  Grâce au formalisme des sommes presque nulles, la formule reste vraie pour $A \subset E$. En conséquence, si

$$\forall x \in E,\ \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$$

  alors X et Y ont même loi (*ie* $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$).

- Image $f(X)$ lorsque $f : E \to F$.
- Couple de variables aléatoires. Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$.
  - La loi conjointe détermine les lois marginales, mais la réciproque est fausse (contre-exemple non exigible).
  - X et Y sont dites indépendantes lorsque

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

    Dans ce cas, la formule reste évidemment vraie pour $(x,y) \in E \times F$.
  - Supposons que X et Y soient indépendantes. Alors pour tout $A \subset E$ et pour tout $B \subset F$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants.
  - Loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ (lorsque $\mathbb{P}(X = x) > 0$).
  - "Transfert d'indépendance" : si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Généralisation à n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$. Lemme des coalitions.
- Variable aléatoire qui suit une loi donnée.
  - Soit $(E, \mathbb{Q})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to E$. On dit que X suit la loi $\mathbb{Q}$ lorsque $\mathbb{P}_X = \mathbb{Q}$. Caractérisation par les probabilités élémentaires : il suffit de vérifier que

$$\forall x \in E,\ \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{Q}(\{x\}).$$

  - Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
  - Somme de Bernoulli i.i.d.

- Utile pour formaliser les exercices : simulation de variables aléatoires (les résultats de ce paragraphe sont admis).
  - Quelle que soit la loi $\mathbb{Q}$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X définie sur Ω telle que X suive $\mathbb{Q}$.
  - Plus généralement, quels que soient les espaces probabilisés $(E_1, \mathbb{Q}_1), \ldots, (E_n, \mathbb{Q}_n)$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur Ω, indépendantes, telles que chaque X_i suive $\mathbb{Q}_i$.
  - En pratique, les élèves auront le droit de formaliser un exercice en introduisant "une variable uniforme", ou "n variables de Bernoulli indépendantes", etc. Ils n'auront pas à justifier l'existence de telles variables aléatoires, ni de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel elles sont définies.
- Espérance
  - L'espérance de X est définie par $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \times x$.
    Elle vérifie également $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in B} \mathbb{P}(X = x) \times x$ pour tout ensemble B tel que $X(\Omega) \subset B \subset \mathbb{R}$.
  - Elle vérifie également $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \times X(\omega)$.
  - Formule de transfert.
  - Linéarité, positivité, croissance.
  - Inégalité de Cauchy-Schwarz.
  - Espérance d'une constante, d'une Bernoulli, d'une binomiale.
  - Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, mais la réciproque est fausse (contre-exemple non exigible).
  - Inégalité de Markov.
- Variance
  - La variance de X est définie par $\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big]$.
    Elle vérifie également $\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
  - Développement de $\mathrm{V}(aX + b)$.
  - Écart-type. Variable centrée réduite.
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  - Covariance. Développement de $\mathrm{V}(X_1 + \ldots + X_n)$. Cas où les X_i sont deux à deux indépendantes.
  - Variance d'une Bernoulli, d'une binomiale.

Partie II - Exercices sur les séries numériques

Tout le chapitre à revoir (exercices uniquement).

Partie III - Sommabilité

Note : l'esprit du programme est le suivant.

- *On commence par définir une "arithmétique de $[0, +\infty]$", grâce à laquelle on peut sommer sans aucune précaution d'existence des sommes.*
- *Puis on définit la sommabilité dans le cas réel ou complexe à partir de la famille des modules. Dans ce cas, on démontre que les opérations habituelles sont licites (linéarité, sommation par paquets, etc.).*
- *En théorie, avec une famille $(a_i)_{i \in I}$ réelle ou complexe, il faudrait travailler en deux temps :*
  - *calculer sur la famille $(|a_i|)_{i \in I}$, sans aucune précaution d'existence des sommes en jeu, pour aboutir à un résultat de sommabilité ;*
  - *reprendre les calculs précédents "sans les modules", ce qui est maintenant justifié.*

- *En pratique, il faut bien reconnaître que, sans brouillon, il est difficile sinon impossible de deviner à l'avance l'expression de la famille $(a_i)_{i\in I}$. Typiquement, s'il s'agit de prouver que la somme d'une série est égale à la somme d'une autre série, il s'agira bien souvent de passer par des calculs intermédiaires de sommabilité, en faisant apparaître une famille $(a_i)_{i\in I}$ en cours de calcul. Dans ce cas, les élèves sont autorisés à procéder dans l'ordre suivant :*

  i) Calculer au brouillon sans précaution de sommabilité.

  ii) Identifier la famille $(a_i)_{i\in I}$ qui est apparue en cours de calcul, puis prouver sa sommabilité. Si l'élève constate qu'il suffit de reprendre une partie du brouillon "en rajoutant des modules", il peut se contenter de le remarquer par oral.

  iii) En général, le fait que la famille $(a_i)_{i\in I}$ soit sommable suffira à justifier le brouillon, mais il vaut mieux s'en assurer (au moins par oral), quitte à repréciser certains détails à la demande de l'examinateur.

- Familles à termes dans $[0, +\infty]$.
  - On admet que les prolongements de $+$, $\times$ et $\leq$ au domaine $[0, +\infty]$ vérifient toutes les propriétés voulues.
  - Définition de la somme en toute généralité (à l'aide d'une borne supérieure).
  - Somme d'une sous-famille, d'une famille majorée par une autre famille.
  - Lien avec les séries à termes dans $\mathbb{R}_+$.
  - Changement de variable.
  - Linéarité.
  - Relation de Chasles (= sommation par paquets dans le cas de 2 paquets).
  - Sommation par paquets. Application : théorème de Fubini.
- Familles à termes réels : extension des résultats précédents.
- Les familles à valeurs complexes et le produit de Cauchy ne sont pas au programme de cette colle.

Partie IV - Questions de cours (shortlist)

i) Lemme des coalitions.

ii) Somme de n variables aléatoires de Bernoulli i.i.d.

iii) Formule de transfert.

iv) Espérance d'une binomiale.

v) Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

vi) Inégalité de Markov.

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=br2ADkZuH9w`