Semaine du 30 septembre : Géométrie, Ensembles

<u>Note :</u> *si on le souhaite, on pourra poser un petit exercice sur le programme de la semaine dernière (par exemple une équation à résoudre dans $\mathbb{C}$), mais ce n'est clairement pas au cœur du programme de cette semaine. En particulier, il n'y aura aucune question de cours portant sur le programme précédent.*

Partie I - Géométrie

On suppose connue l'existence du "plan usuel de la géométrie euclidienne". On le munit d'un repère orthonormal direct (on ne soulèvera aucune difficulté théorique sur ce point).

- Affixe d'un point, d'un vecteur.
- Interprétation géométrique du module, de l'argument (les notions d'angle et de mesure d'angle n'ayant pas été définies rigoureusement, on ne soulèvera aucune difficulté théorique sur ce point).
- Application : CNS de colinéarité, d'orthogonalité de deux vecteurs.
- Définition d'une translation, d'une rotation, d'une homothétie. Expression à l'aide des complexes.
- Définition retenue dans le cours : on appelle similitude (directe) toute application du plan dans lui-même admettant une équation de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 0$. Cas particulier d'une translation, d'une rotation, d'une homothétie.
- Une rotation et une homothétie de même centre commutent, et leur composée est une similitude (directe). La commutativité permet de définir sans ambiguïté "la similitude de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ".
- Réciproquement, étude d'une similitude (directe) d'équation $z \mapsto az + b$.

Partie II - Ensembles et applications

<u>Note :</u> *C'est un chapitre largement nouveau pour les étudiants. Aussi, on prendra garde à la progressivité des exercices. En colle, les étudiants sont largement encouragés à réaliser des diagrammes de Venn ou des diagrammes sagittaux si cela peut les aider.*

- Appartenance, inclusion, égalité.
- Parties d'un ensemble : union de deux parties, intersection de deux parties, complémentaire d'une partie.
- Commutativité et associativité de l'union et de l'intersection. Distributivité de l'union sur l'intersection et vice-versa.
- Produit cartésien de deux ensembles, de n ensembles (aucune définition formelle exigible).
- Définition d'une application (ou d'une fonction, le programme ne fait pas de différence).
- Fonction indicatrice d'une partie.
- Restriction, corestriction, prolongement (exemples).
- Quelques applications particulières : fonction indicatrice, identité, injection canonique.
- Injectivité, surjectivité, bijectivité (exemples).
- Composition des applications (elle est associative).
- La composée de deux injections (resp. surjections resp. bijections) est une injection (resp. surjection resp. bijection).

- Réciproque partielle : si $g \circ f$ est injective alors f est injective, et si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- Si f est bijective, définition de l'application f^{-1}. Elle vérifie

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \end{cases}$$

  On en déduit qu'elle est bijective ; on l'appelle la bijection réciproque de f.
- Réciproquement, soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ telles que

$$\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}$$

  Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.
- Involution. Toute involution est bijective.
- Il existe une bijection de E dans F ssi il existe une bijection de F dans E. Dans ce cas, on dit que E et F sont équipotents.
- Image directe d'une partie, image réciproque.
- Les images réciproques passent sans problème à l'union, à l'intersection et au complémentaire. Pour les images directes, il faut être plus prudent (seule l'union fonctionne dans le cas général).
- Dans un premier temps, nous avons adopté dans le cours les notations $f^{\rightarrow}(A)$ et $f^{\leftarrow}(B)$, avant d'exposer les "vraies" notations $f(A)$ et $f^{-1}(B)$. S'il le souhaite, cette semaine, l'élève pourra continuer à utiliser les notations $f^{\rightarrow}(A)$ et $f^{\leftarrow}(B)$.
- Attention, les points suivants ne sont pas au programme de cette semaine de colle : familles quelconques, familles de parties d'un ensemble, généralisation des résultats précédents sur les opérations ensemblistes, les images directes et les images réciproques.

Partie III - Shortlist (questions de cours)

i) Distributivité de l'union sur l'intersection et vice-versa.

ii) La loi $\circ$ est associative.

iii) La composée de deux injections (resp. surjections resp. bijections) est une injection (resp. surjection resp. bijection).

iv) Réciproque partielle : si $g \circ f$ est injective alors f est injective, et si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

v) Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ telles que

$$\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}$$

Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

vi) Image réciproque de l'union de 2 parties, de l'intersection de 2 parties.

Morceau de la semaine (Sigma on fire) : `https://www.youtube.com/watch?v=gXtieqCN_8Q`