

Semaine du 14 octobre : Fonctions usuelles, algèbre

Partie I - Fonctions usuelles

- Les exercices pourront faire la part belle aux "révisions de lycée" (cf. programme de colle de la semaine dernière).
- Soit I et J deux intervalles non triviaux, et $f : I \rightarrow J$ une bijection. On note $g : J \rightarrow I$ la bijection réciproque. Les deux théorèmes suivants ont été admis :
 - si f est strictement monotone, alors g est continue ;
 - si f est strictement monotone et si f est dérivable en a , alors g est dérivable en $b = f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$.
De plus, dans ce cas, on a $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.
- Le logarithme népérien a été défini comme l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 (définition admise).
- Limites. Identités usuelles.
- Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, définition du logarithme de base a . On le note $\log_a$.
- Définition de l'exponentielle comme bijection réciproque. Continuité, dérivabilité, identités usuelles. Limites.
- Inégalités $\ln(1+x) \leq x$ et $\exp(x) \geq 1+x$.
- Définition de a^x si $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ (voire $x \in \mathbb{C}$). Par convention, on pose aussi

$$\forall x > 0, 0^x = 0$$

(mais on rappelle que $0^0 = 1$). Identités usuelles. Notation e^x .

- Croissance comparée entre les logarithmes, les puissances et les exponentielles.
- Définition de arccos, arcsin et arctan. Étude détaillée de ces fonctions.
- Définition de la partie paire et de la partie impaire d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (preuve de l'unicité / existence par analyse / synthèse).
- Définition des fonctions trigonométriques hyperboliques (notées ch, sh, th). Étude détaillée de ces fonctions. Les seules formules exigibles sont

$$\begin{cases} \text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1 \\ \text{ch}' = \text{sh} \\ \text{sh}' = \text{ch} \end{cases}$$

- Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

Partie II - Introduction à l'algèbre

- Relations d'ordre
 - Ordre total, ordre partiel. Exemples.
 - Ordre lexicographique (exemple de E^2).
 - Majorant d'une partie, minorant d'une partie.
 - Maximum d'une partie, minimum d'une partie. Il y a unicité, mais pas toujours existence.
 - Dans un ensemble totalement ordonné, toute partie finie non vide admet un maximum et un minimum.
 - Les notions d'élément maximal et d'élément minimal sont hors programme. Ni nécessaire, elles doivent donc être redéfinies par le colleur.
- Relations d'équivalence
 - Classe d'équivalence.
 - Une classe d'équivalence peut être considérée comme la classe de n'importe lequel de ses éléments.
 - Ensemble-quotient. Surjection canonique associée.
 - Les classes d'équivalence forment une partition (la réciproque est hors programme).
- Loi de composition interne
 - Associativité, commutativité, élément neutre (il y a unicité).
 - Si la loi est associative et admet un élément neutre, définition de l'inversibilité d'un élément (il y a unicité).

Partie III - Shortlist (questions de cours)

- Prouver que $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- Définition de l'exponentielle (réelle), preuve de la dérivabilité et valeur de la dérivée.
- Prouver que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- Définition et étude de la fonction arccos.
- Définition et étude de la fonction sh.
- Dans un ensemble totalement ordonné, toute partie finie non vide admet un maximum et un minimum.

Morceau de la semaine : <https://www.youtube.com/watch?v=a0E510fBvqE>

