Semaine du 4 novembre : Algèbre générale

Attention, ce programme tient sur 2 pages.

Partie I - Introduction à l'algèbre

- Tout le début du chapitre à revoir (cf. programme de la semaine précédente).
- On admet l'existence de $\mathbb{N}$, un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\leq$, qui vérifie les trois propriétés fondamentales suivantes :
  - toute partie non vide admet un minimum ;
  - toute partie non vide et majorée admet un maximum ;
  - $\mathbb{N}$ n'admet pas de maximum.

  On en déduit que $\leq$ est totale. Bien entendu, la construction de $\mathbb{N}$ n'est pas au programme !
- Validité du principe de récurrence, construction de $+$ et $\times$, démonstration de leurs propriétés usuelles : évidemment, rien n'est exigible. En revanche, ce peut être une bonne occasion de poser un exercice se traitant par récurrence.
- Extension à $\mathbb{Z}$ (tout est admis).
- Retour sur les formules sommatoires : définition par récurrence de $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\prod_{k=1}^{n} a_k$ dans $\mathbb{C}$. Définition de $\sum_{i\in I} a_i$ et de $\prod_{i\in I} a_i$ lorsque I est fini (validité de la construction admise). Changement de variable.
- Associativité de la somme et du produit (admise). Sommes doubles (l'interversion de sommes, ou "théorème de Fubini", est admise, mais il faut savoir la pratiquer).
- Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
- Décomposition en base $b \geq 2$ dans $\mathbb{N}^\star$.

Partie II - Groupes

- Définition d'un groupe, exemples. Notation multiplicative, additive.
- Régularité d'un élément. Inverse d'un produit.
- Produit cartésien de deux groupes.
- Sous-groupes.
  - Définition retenue dans le cours : un sous-groupe de G est une partie $H \subset G$ stable par la loi de G, qui contient le neutre et qui est stable par passage à l'inverse.
  - Tout sous-groupe est un groupe pour la loi induite.
  - Condition suffisante pour qu'une partie soit un sous-groupe, exemples.
  - Intersection d'un ensemble de sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie.
  - Définition de x^n pour $n \in \mathbb{Z}$ (les identités $x^{m+n} = x^m x^n$ et $(x^m)^n = x^{mn}$ sont connues).
  - Sous-groupe engendré par un élément : on démontre que $< x > = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

    - Groupe monogène, groupe cyclique.
    - Aucun énoncé sur les groupes finis n'est exigible, à part le théorème de Lagrange, dont la démonstration est admise.

- Morphismes de groupes.
    - Définition, propriétés de base.
    - Image d'un sous-groupe, image réciproque (par un morphisme).
    - Noyau, image, injectivité.
    - La composée de deux morphismes est un morphisme. La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Partie III - Shortlist (questions de cours)

i) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

ii) Formule $< x > = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

iii) Un morphisme de groupes envoie le neutre sur le neutre, l'inverse sur l'inverse.

iv) Image d'un sous-groupe par un morphisme de groupes, image réciproque.

v) Morphisme de groupes : noyau et injectivité.

vi) La composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes. La bijection réciproque d'un isomorphisme de groupes est un isomorphisme de groupes.

Morceau de la semaine : `https://www.youtube.com/watch?v=HZ3f1Y8Aw_U`